

storia/history

Emiliano Della Bella

Gli algoritmi degli archi del Folio 20v del portfolio di Villard de Honnecourt
The algorithms of the arches on Folio 20v of the portfolio by Villard de Honnecourt

The paper examines several drawings in the portfolio by Villard de Honnecourt and analyses similarities and discrepancies between medieval pointed arches and their modern counterparts, in particular, the methods used in worksites and the use of practical geometry. Exposing several sheets to ultraviolet light revealed many hidden notes and drawings – some faded and others deliberately erased – making it possible to improve our understanding and interpretation of their construction algorithms.

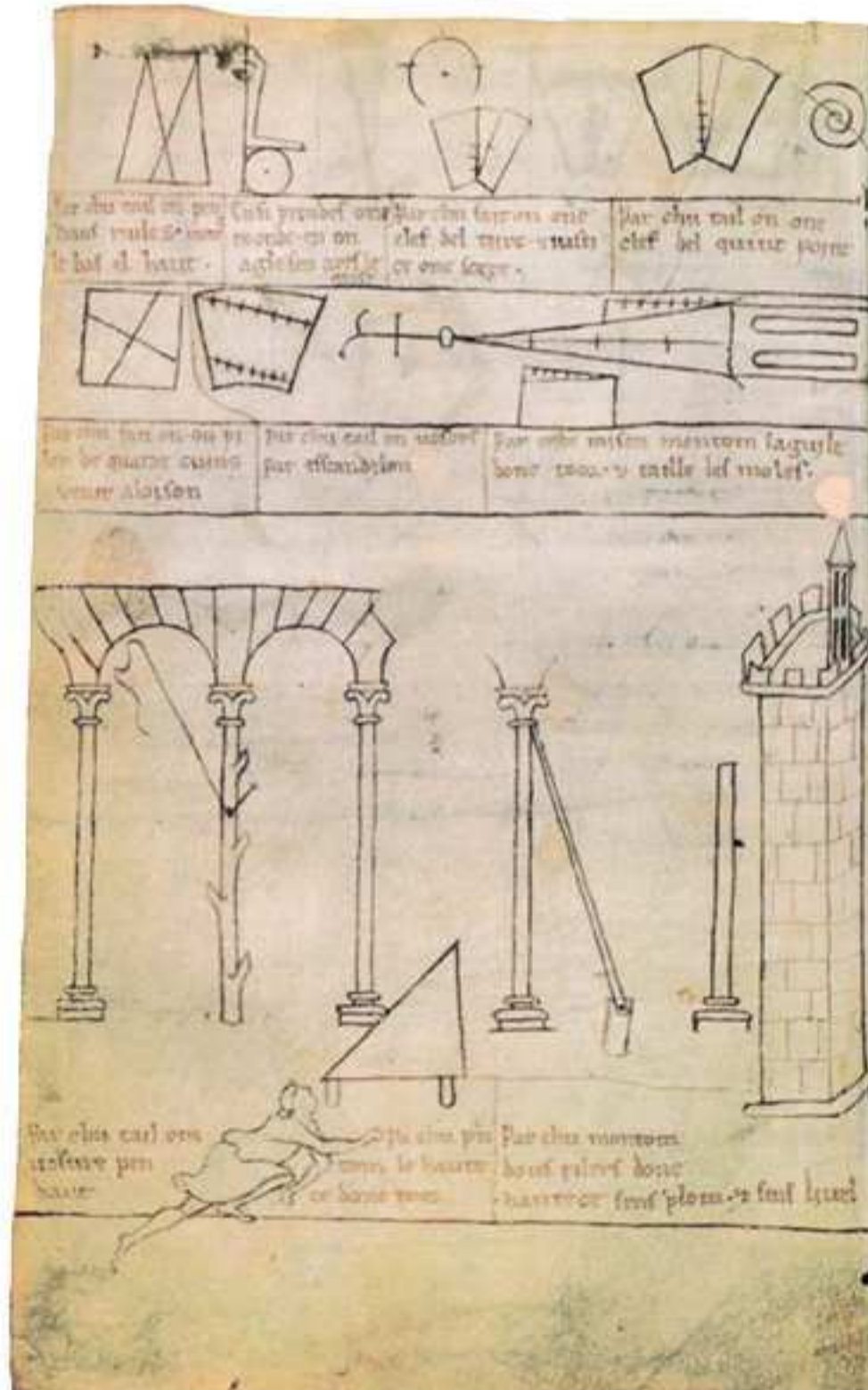
Key words: Villard de Honnecourt, Middle Ages, Gothic, arches, geometry.

I was truly thrilled when I first leafed through the sheets of the portfolio by Villard de Honnecourt.¹ The soft, skilfully-drawn folds of the clothes on the figures, the 'secrets' hidden by cryptic geometries triggered an enthusiasm that many years later led me to carry out more in-depth studies on geometry and medieval Stereotomy.² Although in the past fifty years many in-depth studies have focused on his portfolio and Villard himself, it's still difficult to stop thinking about Villard as a thirteenth-century architect³; in light of the above, the very few drawings Villard made about architecture and



Partendo da alcuni disegni del portfolio di Villard de Honnecourt, il paper analizza analogie e discrepanze degli archi a sesto acuto medievali e le loro controparti moderne. In particolare si pone l'accento sulle metodologie di cantiere e sulla conoscenza della geometria pratica. Sullo stesso portfolio, grazie all'utilizzo dei raggi ultravioletti, è stato possibile "ritrovare" numerosi appunti e disegni – a volte sbiaditi, a volte deliberatamente cancellati – che permettono una più attenta lettura ed interpretazione degli algoritmi costruttivi.

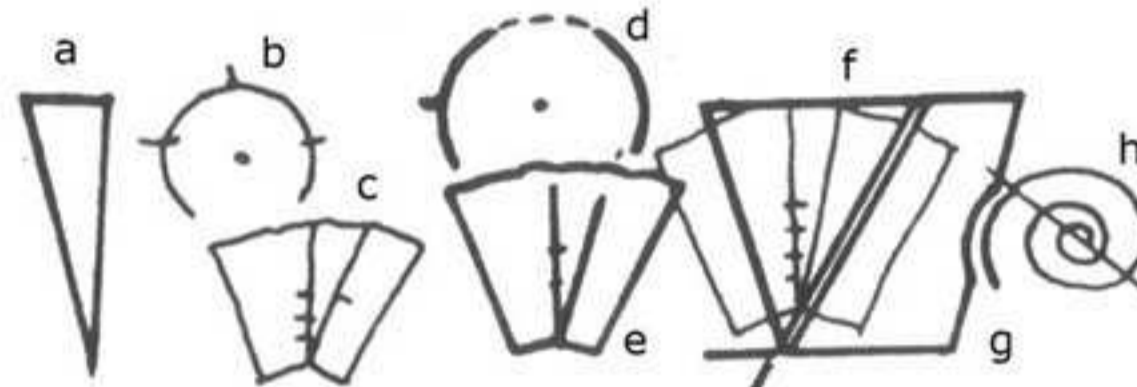
Parole chiave: Villard de Honnecourt, Medioevo, Gotico, archi, geometria.



1/ *Pagina precedente.* Mutus Liber, il motto recita «Prega, leggi, leggi, leggi e rileggi, lavora e troverai». *Previous page. Mutus Liber, the motto reads "Pray, read, read, read and reread, work and you will find".*
 2/ *Pagina precedente.* Folio 20v del portafoglio di Villard de Honnecourt, cm 23,8x14,9. *Previous page. Folio 20v of the portfolio by Villard de Honnecourt; 23,8x14,9 cm.*

3/ Particolare del Folio 20v riscoperto a seguito dell'esposizione della pagina ai raggi ultravioletti da parte di Robert Branner. *Detail of Folio 20v discovered after Robert Branner exposed the sheets to ultraviolet light.*
 4/ Particolare del folio 20v, a sinistra «Par chu fait on one clef del tiirc, justice one scere», a destra «Par chu tail'on clef del quint point». *Detail of folio 20v, left "Par chu fait on one clef del tiirc, justice one scere", right "Par chu tail'on clef del quint point".*

5/ Da sinistra a destra, arco a tutto sesto, arco a terzo acuto, arco a quarto acuto, arco a quinto acuto, arco isoscele. *From left to right, pointed arch, tiers point arch, four point arch, five point arch, isosceles arch.*
 6/ Algoritmo per la determinazione dell'angolo retto da Matthäus Roriczer, Geometria deutsch. *Algorithm to determine a right angle by Matthäus Roriczer, Geometria deutsch.*

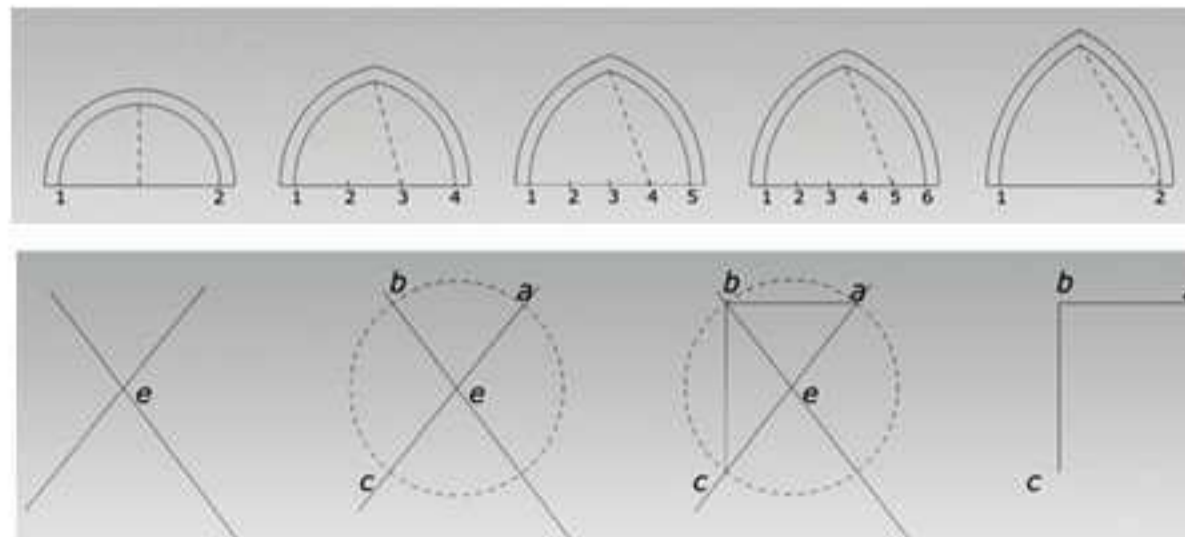


La prima volta in cui si sfogliano le pagine del portafoglio di Villard de Honnecourt¹ si è coinvolti in un'esperienza esaltante. I sapienti e morbidi drappaggi delle vesti delle figure umane, i "segreti" celati da criptici disegni geometrici suscitarono in me una passione tale da portarmi – anni dopo – a ricerche approfondite nella geometria e nella stereotomia medievale². Nonostante negli ultimi cinquant'anni vi siano stati numerosi approfondimenti sulla persona di Villard e sul suo portafoglio, è purtroppo ancora difficile stradicare la concezione che vede in Villard un architetto del XIII secolo³; alla luce di quanto sopra, i pochi disegni di ar-

chitettura e di tecnica stereotomica di Villard rimangono pur sempre una delle prime testimonianze medievali. Questo scritto deve molto a diversi personaggi che dalla metà dell'Ottocento a oggi hanno affrontato la decodifica del testo villardiano; tra questi non è possibile tacere di Hans R. Hahnloser a cui si deve il primo approccio approfondito dell'intera opera, Robert Willis, Leonard Cox, Robert Branner, Theodore Bowie, Paul Frankl e ancora Carl F. Barnes Jr. e Lon R. Shelby. Il fascino delle pagine del portafoglio di Villard è quella sorta di sfida – indovinello muto e ammiccante – che l'autore(i)⁴ ci propone a

stereotomic technique are still among the few early medieval documents that still exist. My paper is indebted to the many scholars who, from the mid-nineteenth century to the present day, have tried to decipher Villard's text, including Hans R. Hahnloser who was the first to study the entire work, Robert Willis, Leonard Cox, Robert Branner, Theodore Bowie, Paul Frankl as well as Carl F. Barnes Jr. and Lon R. Shelby. What is fascinating about the sheets in Villard's portfolio is the sort of challenge – a mute and eloquent riddle – that the author(s)⁴ propose(s) with every 'technical' drawing. So it's not surprising that the motto by Mutus Liber springs to mind: "Ora, Lege Lege Lege Relege Labora et Invenies"⁵ (fig. 1). Many of the so-called 'technical' drawings have often been studied and interpreted⁶; Michael Davies noted that "[the drawings] are far from user-friendly instructions to guide the would-be builder"⁷ while Robert Branner stated "[Mastro II's] drawings are so cryptic and the texts beneath them so brief, that no adequate explanation have ever been found for them"⁸.

Folio 20v (fig. 2) is particularly interesting; it has several drawings and inscriptions normally attributed to Villard and Mano IV.⁹ In the 1960s Branner exposed the sheet to ultraviolet light and discovered several drawings that had been erased¹⁰ (fig. 3). This made it possible to offer a better interpretation of the sequence indicated by Hahnloser as 20c, 20d and 20e,¹¹ respectively noted by Mano IV as "Par chu fait on one clef del tiirc, [et]¹² justice one scere", and "Par chu tail on one clef del quint point"¹³ (fig. 4). Many scholars have tried to explain the sequence, including amongst others, Hahnloser,¹⁴ Viollet-le-Duc,¹⁵ Willis and Branner. The term tiirc, translated by Hahnloser as 'tiers-point arch'¹⁶ by Mano IV (likewise, quint point, 'five point'), is very different from the meaning and figure we use today.¹⁷ What we mean today by 'tiers point arch', in fact, rests on a base divided into three equal parts; the centres of the curves are located at 2/3 and 1/3 of the impost itself (fig. 5). The sequence of the drawings of the arches begins with the 'mute' algorithm 3b, useful in



7/ Spiegazione del disegno di Mano IV su come ottenere un angolo retto.

Explanation of the drawing by Mano IV about how to obtain a right angle.

8/ Spiegazione del disegno di Mano IV (da Barnes) su come ottenere un angolo retto.

Explanation of the drawing by Mano IV (from Barnes) about how to obtain a right angle.

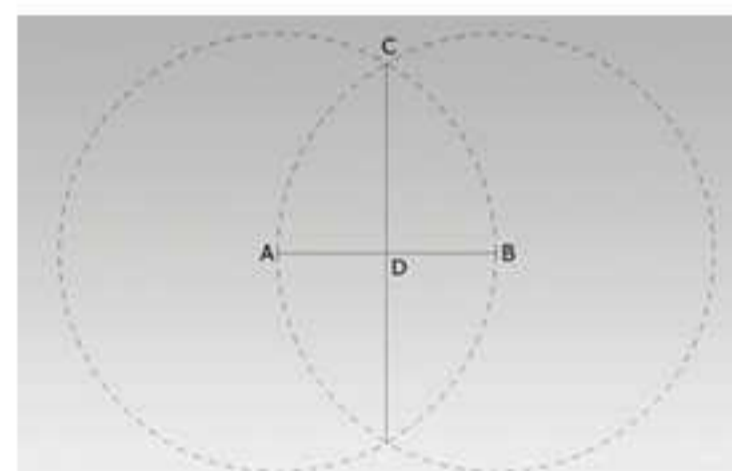
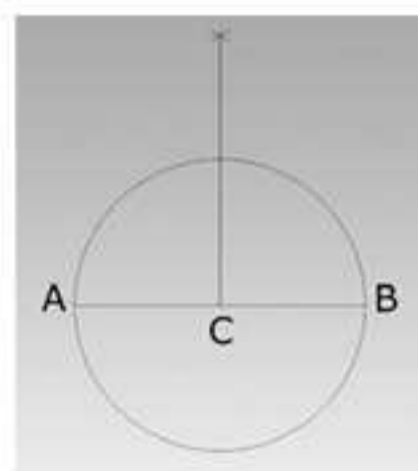
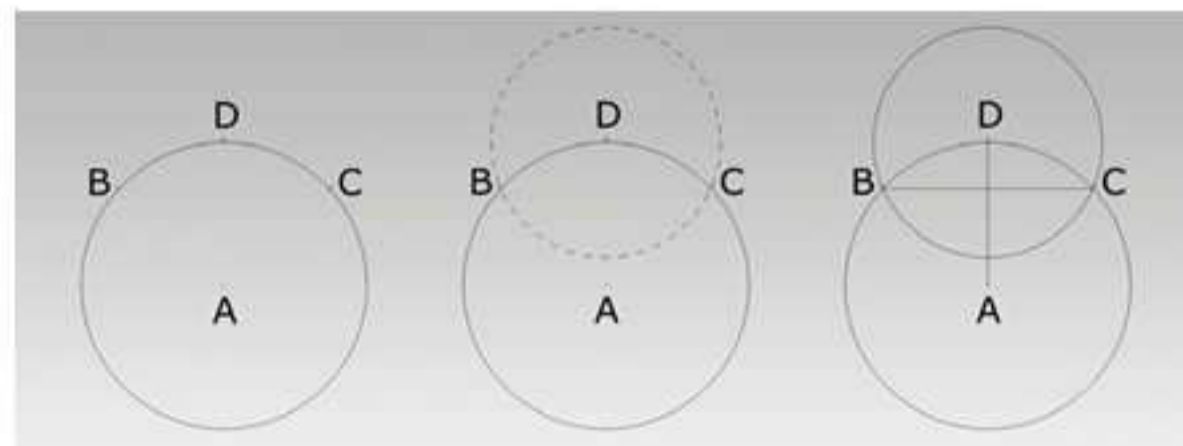
9/ Vesica piscis.
Vesica piscis.

the construction of a right angle. This said, determining an angle in the Middle Ages was – together with the determination in elevation of the curves of vaulted surfaces¹⁸ – one of the main geometric problems of that period; so it's not surprising that Mano IV inserts in primis the procedure about how to verify the perpendicular between the two straight lines. The right angle, scere, provides one of the three tools of the medieval mason, squaring.¹⁹ Therefore, it goes without saying that knowing how to obtain it was extremely important.

One or two methods were illustrated in several medieval notebooks; in his *Geometria deutsch*,²⁰ Matthäus Roriczer (fig. 6), puts it in the first chapter of his little book.

“AUS DER GEOMETREY ettliche nuczpere stuckle[n] die hernach geschriben sten Czum erst[e]n beh end ain gerecht winckelmasz cze mach[e]n So mach czwen riss vber ain and[er] an geferd wie du wild vnd wo die riss vb[er] ain ande[er] geen da sez ain :c: Danach sez ain czirkel mit ainem ort auf den pinckt :e: vn[d] czuich i[h]n auf als weit dv wild vn[d] mach auf yede linj ain pu[n]kt Das sein die puchstaben :a: :b: :c: das alles ain weiten sey Danach mach ain linj vo[m] :a: jn das :b: vn[d] vom :b: jn das :c: So hastu ain gerecht winckelmasz Des ain exempel hernach stet So dv riss noher tuest der man nit bedarf den nur czv der ausztailung So hat das ain sol[c]he gestalt als hernach gemacht stet”.²¹

Returning to our portfolio, even Mano IV indicates in 3b how to obtain two perpendicular straight lines. Draw a circumference with a chosen radius and centre in A. Point the compass on the circumference and draw a second circumference with a smaller radius, the centre of which will be in D and will create points B and C on the first. Draw the straight lines AD and BC, the right angle will be located at the intersection (fig. 7). In my opinion, Robert Burns²² interprets the drawing incorrectly (fig. 8); he – probably – refers to the well-known construction of the vesica piscis²³ (fig. 9); point A and B, which Burns interprets as the extreme points of the diameter are in fact aligned by the latter with centre C, thereby forcing the interpretation of Villard's drawing.



ogni disegno “tecnico”. Viene in mente, nemmeno a farlo apposta, il motto del *Mutus Liber*: «Ora, Lege Lege Lege Relege Labora et Invenies»⁵ (fig. 1).

Molti dei disegni così detti “tecnici” sono stati oggetto di numerosi studi e interpretazioni;⁶ Michael Davis osserva che «[i disegni] non sono nemmeno lontanamente di aiuto al novello costruttore»⁷, mentre Robert Branner afferma «I disegni [di Mastro II] sono così criptici ed i testi che li accompagnano così brevi, che non si è ancora trovata una perfetta spiegazione».⁸ Di notevole interesse, è il Folio 20v (fig. 2) che presenta una serie di disegni e iscrizioni generalmente attribuiti a Villard e a Mano IV⁹. Negli anni Sessanta del Novecento Branner espose la pagina ai raggi ultravioletti riscoprendo così alcuni disegni cancellati¹⁰ (fig. 3). Questi hanno permesso una migliore lettura della sequenza indicata da Hahnloser come 20c, 20d e 20e¹¹, rispettivamente annotati da Mano IV con «Par chu fait on one clef del tiirc, [et]»¹² justice one scere., e «Par chu tail on one clef del quint point»¹³

(fig. 4). Numerosi sono stati gli studiosi che hanno provato a spiegare la sequenza; tra questi, solo per citarne alcuni, lo stesso Hahnloser¹⁴, Viollet-le-Duc¹⁵, Willis e Branner.

Il termine *tiirc* è stato tradotto da Hahnloser con la locuzione “arco a terzo acuto”¹⁶; vedremo in seguito però che il “terzo acuto” di Mano IV (così come il *quint point*, “quinto acuto”) è ben diverso dal significato e dalla figurazione moderna¹⁷. Ciò che oggi intendiamo per arco “a terzo acuto”, infatti, è impostato su una base suddivisa in tre parti uguali; i centri delle curve sono situati a 2/3 e a 1/3 dell’imposta stessa (fig. 5).

La sequenza dei disegni relativi agli archi comincia con l’algoritmo “muto” 3b utile alla costruzione dell’angolo retto.

Ora, la determinazione di un certo angolo è – insieme alla determinazione in alzata delle curve delle superfici voltate¹⁸ – uno dei principali problemi geometrici medievali; non è quindi un caso se Mano IV inserisce in primis il procedimento su come verificare la perpendi-

10/ Particolare del Folio 18v, cm 24,1x15,4. Il disegno dei fenicotteri è attribuito a Villard.
Detail of Folio 18v, 24,1 x 15,4 cm. The drawing of flamingos is attributed to Villard.

11/ Particolare del Folio 21r, cm 24,1x14,6. Il disegno della vesica piscis è attribuito a Mano IV.
Detail of Folio 21r, 24,1 x 14,6 cm. The drawing of the vesica piscis is attributed to Mano IV.

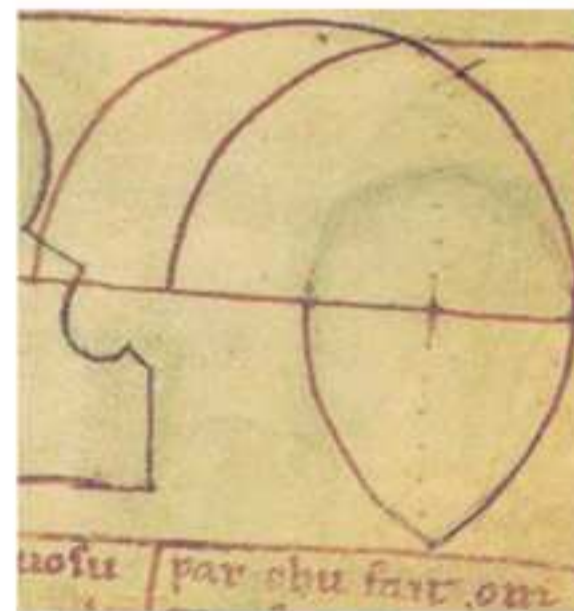
colarità tra due rette. Dall'angolo retto, *scere*, si ottiene uno dei tre strumenti del *mason* medievale, lo squadro¹⁹. È del tutto evidente, quindi, come la sua determinazione sia di estrema importanza. Troviamo, in diversi taccuini medievali, alcuni metodi di costruzione; Matthäus Roriczer (fig. 6), nel suo *Geometria deutsch*²⁰, lo pone al primo capitolo del proprio libello. «AUS DER GEOMETREY etliche nuczper stuckle(n) die hernach geschriben sten Czum erst[e]n beh end ain gerecht winckelmasz cze mach[e]n So mach czwen riss vber ain and[er] an geferd wie du wild vnd wo die riss vb[er] ain ande[er] geen da secz ain :c: Danach secz ain czirkel mit ainem ort auf den pinckt :c: vn[d] czuich i[h]n auf als weit dv wild vn[d] mach auf yede linj ain pu[n]ckt Das sein die puchstaben :a: :b: :c: das alles ain weiten sey Danach mach ain linj vo[m] :a: jn das :b: vn[d] vom :b: jn das :c: So hastu ain gerecht winckelmasz Des ain exempel hernach stet So dv riss noher tuest der man nit bedarf den nur czv der ausztailung So hat das ain sol[c]he gestalt als hernach gemacht stet»²¹.

Ritornando al nostro portfolio, anche Mano IV indica in 3b come ottenere due rette tra loro perpendicolari. Si tracci una circonferenza avente raggio a piacere e il centro in A. Sulla circonferenza si punti il compasso e si tracci una seconda circonferenza di raggio minore, questa avrà centro in D e staccherà sulla prima i punti B e C. Si traccino le rette AD e BC, la loro intersezione individua un angolo retto (fig. 7). A mio avviso, Robert Burns²² interpreta il disegno erroneamente (fig. 8) rifacendosi – probabilmente – alla nota costruzione della *vesica piscis*²³ (fig. 9); i punti A e B, che Burns interpreta come estremi del diametro sono infatti da questi allineati con il centro C, forzando in tal modo la lettura del disegno villardiano.

A questo punto, una volta verificato lo *scere*, possiamo passare alla seconda fase, la costruzione del *tiirc*.

La figura 3c indica l'estremità di un "arco a terzo acuto" così come è inteso da Mano IV. Tra i due *vossours*²⁴ delle due arcate vi è disegnato un triangolo rettangolo avente l'ipotenusa suddivisa in tre segmenti uguali.

Il segmento AG misura esattamente come AB, BC, CD, ed è perpendicolare a GD (fig. 12). Il segmento GD rappresenta quindi il cateto



maggiore di un triangolo rettangolo avente l'altro cateto – AG – pari a 1 e l'ipotenusa – AD – pari a 3; dal Teorema di Pitagora si avrà:
 $GD = \sqrt{AD^2 - AG^2}$
sostituendo i valori noti:
 $GD = \sqrt{3^2 - 1^2}$
 $GD = 2\sqrt{2}$.

Il numero irrazionale così trovato era all'epoca incalcolabile, ed è qui che entra in gioco la spirale²⁵ della figura 3b come sapientemente rilevato da Branner.²⁶

At this point, once verified the *scere*, we can move on to the second phase, the construction of the *tiirc*.

Figure 3c indicates the end of a 'tiers-point arch' as conceived by Mano IV. Between the two *vossours*²⁴ of the two arches a right-angled triangle is drawn with a hypotenuse divided into three equal segments.

Segment AG is exactly the same length as AB, BC, and CD, and is perpendicular to GD (fig. 12). Segment GD therefore represents the major cathetus of a right-angled triangle with another cathetus – AG – equal to 1 and the hypotenuse – AD – equal to 3; based on the theorem by Pythagoras:

$$GD = \sqrt{AD^2 - AG^2}$$

replacing the known values:

$$GD = \sqrt{3^2 - 1^2}$$

$$GD = 2\sqrt{2}$$

At the time it was impossible to calculate this irrational number and this is where the spiral²⁵ in figure 3b comes into play, as cleverly highlighted by Branner.²⁶ To construct the spiral in the drawing by Mano IV, start with a vertical straight line, or axis y (fig. 13). On this draw a semicircle with centre in A and a unitary diameter intersecting the axis in points B and C. With a BC aperture of the compass, put the point in B and draw a

12/ Spiegazione dell'algoritmo 3c del Folio 20v per determinare il centro di un tiirc.
Explanation of the algorithm 3c on Folio 20v to determine the centre of a tiirc.
 13/ Spiegazione dell'algoritmo 3h del Folio 20v per la costruzione della spirale utile alla determinazione del cateto GD dell'illustrazione 11.
Explanation of the algorithm 3h on Folio 20v to construct a spiral to be used to determine the cathetus GD in illustration 11.

14/ Uso dello squadro per la determinazione di uno dei centri del tiirc.
Use of the square rule to determine one of the centres of the tiirc.

semicircumference which, in turn, intersects the axis at point D. Pointing the compass in A with an aperture AD will give point E; then, centre B and aperture BE will give point F and so on for points G, H, etc. The BE line measures $2\sqrt{2}$, the measurement we wanted to find.²⁷

Branner's discovery is undoubtedly very important²⁸ and at the same time is an extremely valid argument in the age-old discussion between scholars on either side of the 'fence': the ones who consider medieval masons as pragmatic and superficial, and those who deemed them to be artisans well versed in mathematics and geometry.²⁹

With reference to illustration 14 – given the two measurements AD and AG – it is possible to calculate the centre of the semicircumference of the tiirc by distancing them on a square rule.

For many years scholars were misled by the fact that, following the algorithm by Mano IV, the voussoir of the keystone of a 'tiers-point arch' could not be calculated.

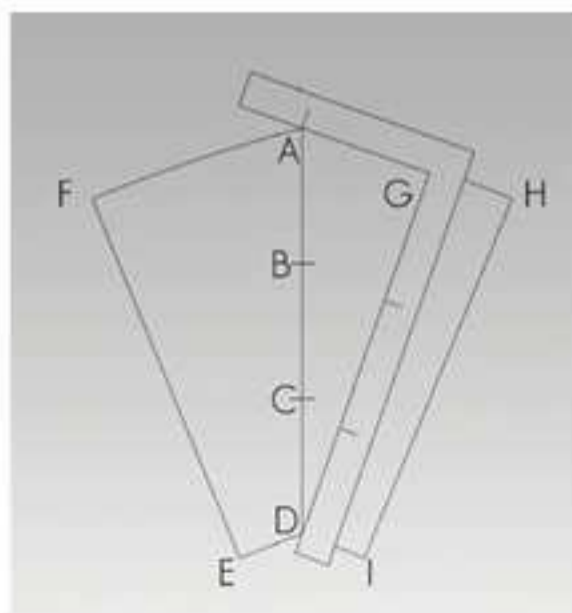
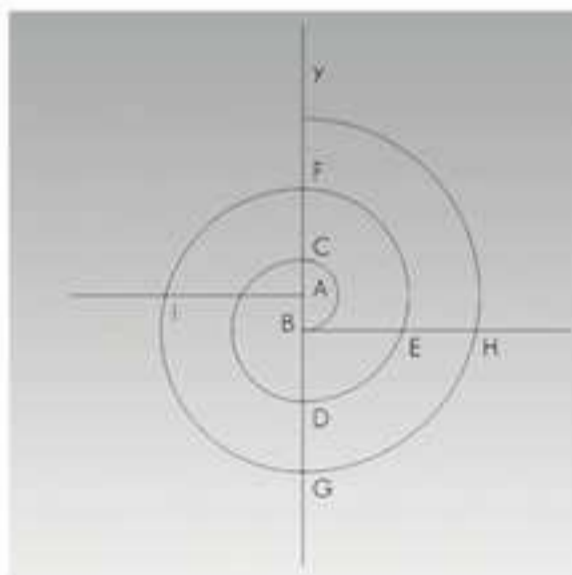
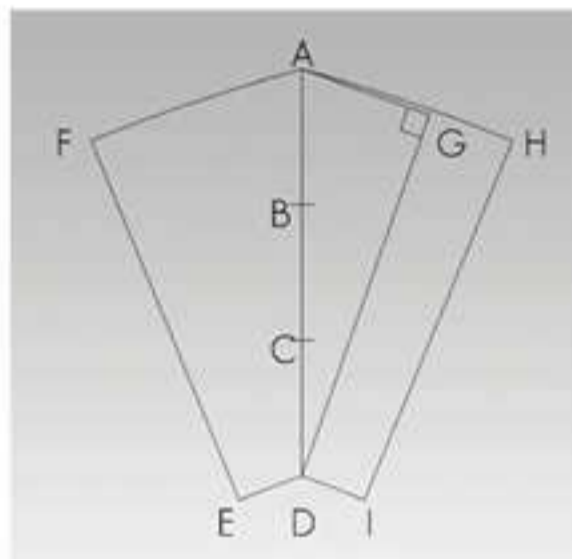
In the next illustration (fig. 15) the corresponding arches have been superimposed, tiirc – tiers point, quatrième – fourth point and quint – fifth point; we can immediately see that the centres are positioned at different points of the impost.

The algorithm of drawing 3f helps "to construct the keystone of a fifth point arch", Mano IV indicates 5 dashes, dividing the vertical segment into 5 parts. If AF, hypotenuse of the right-angled triangle AIF, is equal to 5 and its cathetus AI is equal to 1, then the other cathetus FI will be equal to $2\sqrt{6}$ (fig. 16).

Returning to spiral 3h, the line BH measures exactly $2\sqrt{6}$ and, as in the case of the tiirc it was the third; it is the fifth circumference that will give the sought-after measurement.

The construction of a 'fifth point arch' is achieved by dividing the base of the impost into 5 parts; the centres of the two semicircumferences are in 5 and 2 (fig. 5).

If we use the algorithm by Mano IV, there will be a difference similar to the one between the thirteenth-century tiirc and the classical 'tiers point' arch. However, this centre would be on point 5 (and 3) of an



Per costruire la spirale del disegno di Mano IV, si parte da una retta verticale, o asse y (fig. 13). Su questa si traccia una semicirconferenza avente centro in A e diametro unitario che intersecherà l'asse nei punti B e C. Con apertura del compasso BC, si punta in B e si disegna una semicirconferenza che, a sua volta, intersecherà l'asse nel punto D. Puntando il compasso in A con ampiezza AD troveremo il punto E; e ancora con centro B e ampiezza BE troveremo F e via via nello stesso modo troveremo G, H, etc. Il tratto BE misura $2\sqrt{2}$, la grandezza che volevamo trovare.²⁷

La scoperta di Branner è senza dubbio di notevole importanza²⁸ ed è al tempo stesso un argomento estremamente valido nella discussione annosa che vede gli studiosi su due fronti contrapposti, chi vuole i masons medievali come faciloni pragmatici e chi vede nella stessa figura un artigiano erudito in matematica e geometria.²⁹ Con riferimento all'illustrazione 14 – note le due misure AD e AG – staccandole su di uno squadro è possibile calcolare il centro delle semicirconferenze del tiirc.

Ciò che ha fuorviato gli studiosi per lungo tempo è il fatto che, seguendo l'algoritmo di Mano IV, non si ricava il concio in chiave di un "arco a terzo acuto".

Nell'illustrazione successiva (fig. 15) sono stati sovrapposti gli archi ritenuti corrispondenti, tiirc – terzo acuto, quatrième – quarto acuto e quint – quinto acuto; si nota immediatamente che i centri sono posizionati in punti diversi dell'imposta.

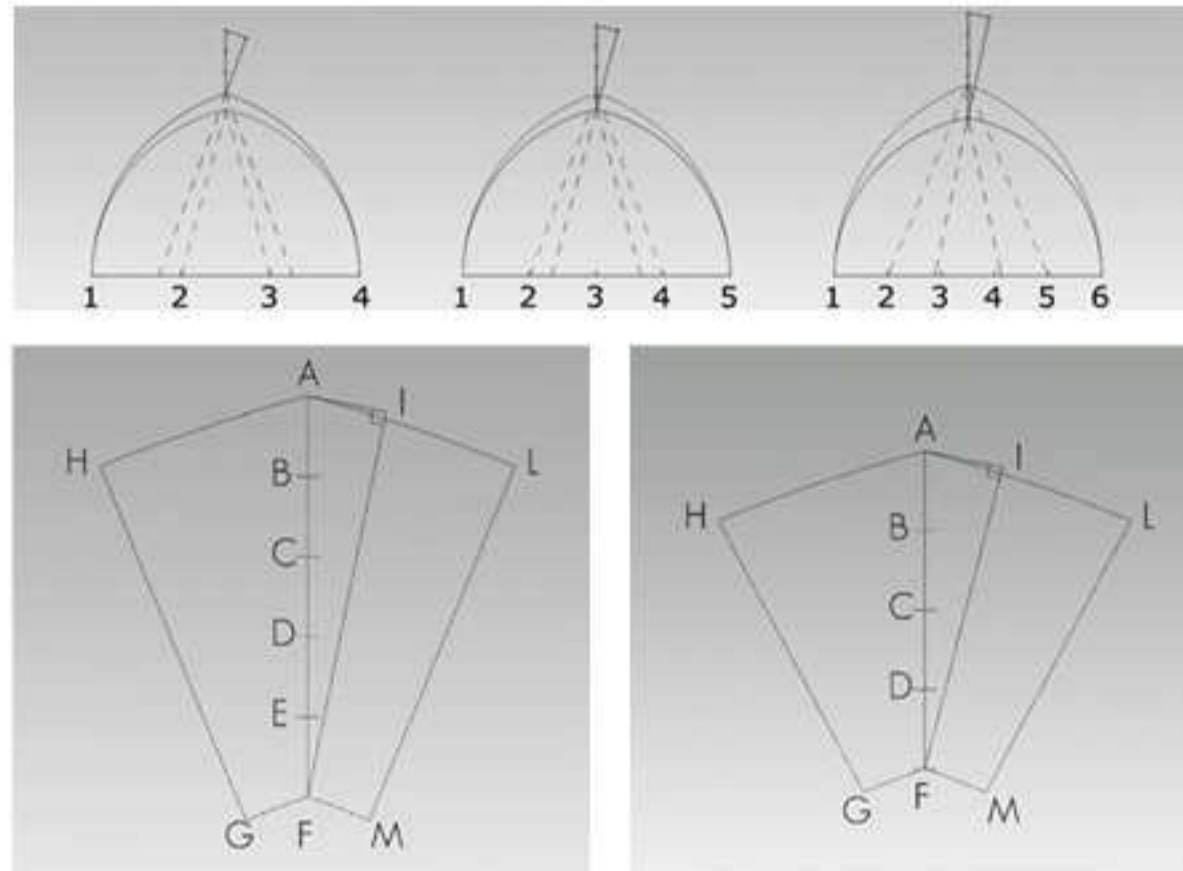
Con l'algoritmo del disegno 3f «si costruisce la chiave di un arco a quinto acuto», Mano IV indica 5 trattini, dividiamo quindi il segmento verticale in 5 parti. Se AF, ipotenusa del triangolo rettangolo AIF, è pari a 5 e il suo cateto AI è pari a 1, allora l'altro cateto FI sarà pari a $2\sqrt{6}$ (fig. 16).

Tornando alla spirale 3h, il tratto BH misura proprio $2\sqrt{6}$ e, proprio come nel caso del tiirc era la terza, è la quinta circonferenza a restituire la misura cercata.

La costruzione di un "arco a quinto acuto" si ottiene dividendo la base di imposta in 5 parti; si punterebbero poi i centri delle due semicirconferenze in 5 e in 2 (fig. 5). Se applicassimo l'algoritmo di Mano IV, incorreremo in una difformità analoga a quella ri-

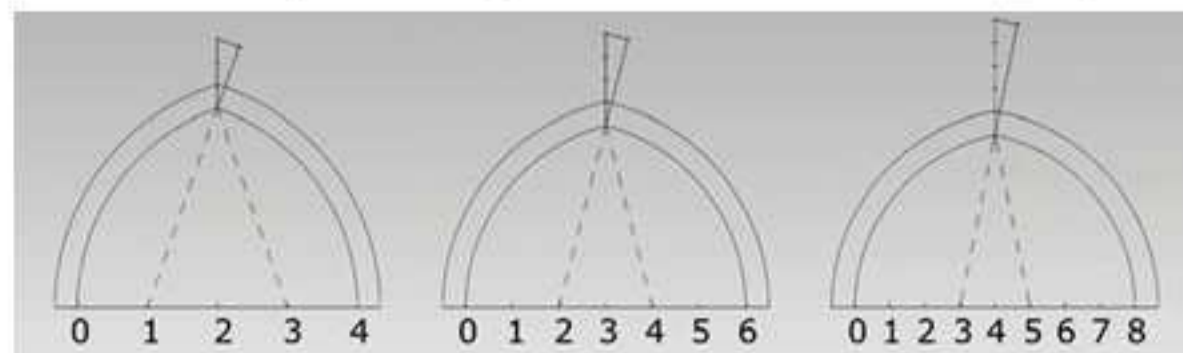
15/ Da sinistra a destra, sovrapposizione degli archi corrispondenti, *tiirc* - terzo acuto, *quatrième* - quarto acuto e *quint* - quinto acuto; si nota immediatamente che i centri sono posizionati in punti diversi dell'imposta.
 From left to right, superimposition of the corresponding arches, *tiirc* - tiers point, *quatrième* - four points and *quint* - five points; it is immediately obvious that the centres are positioned in different parts of the impost.
 16/ Spiegazione dell'algoritmo 3f del Folio 20v per determinare il centro di un *quint* point.

Explanation of the algorithm 3f on Folio 20v to determine the centre of a *quint* point.
 17/ Da sinistra a destra. Costruzione secondo Mano IV del *tiirc*, *quatrième* point e *quint* point.
 From left to right. Construction according to Mano IV of the *tiirc*, *quatrième* point and *quint* point.
 18/ Spiegazione dell'algoritmo 3e del Folio 20v per determinare il centro di un *quatrième* point.
 Explanation of the algorithm 3e on Folio 20v to determine the centre of the *quatrième* point.



scontrata tra il *tiirc* del XIII secolo e l'arco "a terzo acuto" nella sua accezione classica. Tuttavia, il centro così trovato si troverebbe sul punto 5 (e 3) di un arco la cui base di imposta è 0-8 (fig. 17).
 Tutto ciò ci porta a una conclusione: il *tiirc* e il *quint* point non sono l'arco a "terzo acuto" e a "quinto acuto" comunemente conosciuti; mentre i primi posizionano i propri centri basandosi su una proporzione rispettivamente di 3/4 e 5/8 dell'imposta, i secondi avranno i centri a 2/3 e a 4/5 della stessa. Inoltre, iniziando a contare il segmento di imposta con lo 0, il centro dell'arco del *tiirc*, del *quatrième* e del *quint* si

troverà sempre sul punto corrispondente immediatamente oltre la linea di simmetria³⁰. Tra i disegni oggi invisibili, ma individuati da Branner grazie all'esposizione del folio ai raggi ultravioletti, è di notevole importanza 3e, la costruzione di un arco a "*quatrième* point".³¹ Si tratta di una costruzione in cui il segmento verticale è diviso in quattro parti. Applicando di nuovo l'algoritmo di Mano IV (fig. 17 e 18) troviamo il centro dell'arco a 4/6 della linea di imposta.
 A conforto della teoria che vede gli archi villardiani distinti dagli archi gotici di tipo a "terzo acuto", etc., ci viene in aiuto un disegno che si



arch whose impost base is 0-8 (fig. 17). All this leads us to a conclusion: the *tiirc* and *quint* point are not the "tiers point" and "fifth point" arch we are familiar with; while the position of the centres of the former are based respectively on a proportion of 3/4 and 5/8 of the impost, the latter will have centres at 2/3 and 4/5. Furthermore, if we begin to count the segment of the impost starting from 0, the centre of the arch of the *tiirc*, of the *quatrième* and the *quint* will always be on the corresponding point immediately beyond the line of symmetry.³⁰
 Of all the hidden drawings discovered by Branner when he exposed the folio to ultraviolet light, the most important is 3e, the construction of a "*quatrième* point" arch.³¹ This is a construction in which the vertical segment is divided into four parts. By applying the algorithm by Mano IV (figs. 17 and 18), the centre of the arch is 4/6 of the way along the line of the impost.
 A drawing in the archives of the city of Florence³² by Giovanni di Gherardo da Prato³³ (fig. 19) comes to the rescue when discussing the theory stating that Villard's arches are different to the Gothic "tiers point" arches, etc. The drawing shows a "fifth point" arch used by Brunelleschi in the Cathedral in Florence, and dated February 28, 1426. The drawing of the geometric construction of the dome is particularly interesting. The base of the impost, which the text says is 77 braccia, is divided into 5 parts of the length of each braccia, 15 2/5. To the left, apart from the curvature of the arch there is a second curve representing the outer cladding of the dome. The centre of a circumference whose diameter is the line of the impost itself lies on the mean point of the base of the impost; next to it there's a brief note³⁴: "Questo eil centro del quinto acuto e non quel dimezzo" [This is the centre of the sixth middle point]. The centres of the two pointed arches are positioned on the outer fifths of the base. Next to the centre, on the left, there is a note: "Questo eil centro del quinto acuto e non quel dimezzo" [This is the centre of the fifth point and not the middle point]; next to the centre on the right, another text: "Questo e ilcentro delqui(n)to acuto (e) no(n) | quello del mezo adu(n)que uedete

19/ Disegno di Giovanni di Gherardo da Prato riguardante l'arco "a quinto acuto" brunelleschiano utilizzato nel Duomo di Firenze datato 28 febbraio 1426.
Drawing by Giovanni di Gherardo da Prato of a 'five point' arch designed by Brunelleschi and used in the Cathedral in Florence dated February 28, 1426.

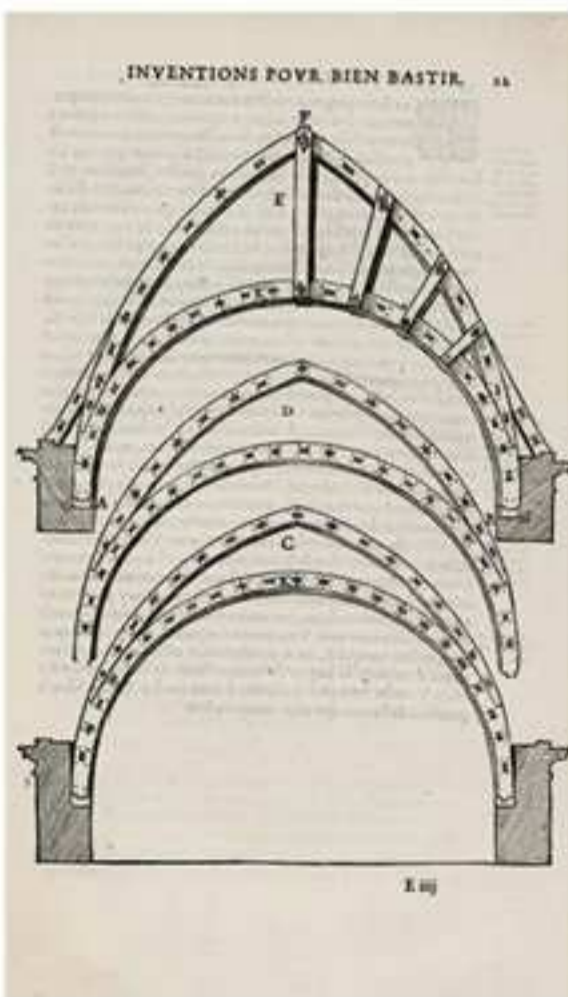
20/ Da Nouvelles inventions pour bien bastir di De l'Orme, sono riprodotti un arco a tutto sesto (K), un arco a terzo acuto (C), un arco a quinto acuto (D) e un arco isoscele (E).
From Nouvelles inventions pour bien bastir di De l'Orme: a pointed arch (K), a tiers point arch (C), a five point arch (D) and an isosceles arch (E).

come | falsame(n)te se murato poi chesesto si mosse | i(n) sulla cornice i(n)pero chesemurato | asesto dimezo acuto (e) non a quinto, facen | do centro del mezo acuto straname(n) | te uae face(n)do | solame(n)te uno centro (e) | ogni a(n)gulo na uno p(er) se secondo del | modello mostrarsi nella presente fi | gura.³⁵

It's obvious that in the fifteenth century in Florence the 'fifth point' arch was different to Villard's quint point.

Moreover, apart from the information provided by Giovanni di Gherardo, in Chapter XV of the Nouvelles inventions pour bien bastir³⁶ published in Paris in 1561 and entitled 'Comme l'on peut faire couvertures de diverses montées, tant de l'hémicycle que du tiers point, et autres', Philippe de l'Orme places the centres of the tiers point arch and the fourth point arch respectively at 2/3 and 3/4 from the base of the impost: "Comme quoi, au lieu que l'hémicycle se prend d'un centre, ces façons ici se prennent de deux, ainsi que pouvez connaitre par la figure ensuivante, en laquelle le lieu marqué C de toute sa largeur se divise in trois parties égales, desquelles faut prendre les deux, et mettre la pointe du compas sur un des centres, et l'autre sur l'extrémité de la largeur, et en faire la circonférence. Après, vous remuerez ledit compas et le mettrez en l'autre centre, et en ferez autant pour l'autre côté, et verrez la montée qui sera beaucoup plus haute que le demi-rond. Mais il faudrait avoir deux centres (ainsi que nous avons dit) pour changer la pointe dudit compas à faire telle circonférence de deux côtés, comme vous voyez à ladite figure suivante. Si voulez les couvertures plus hautes, et que le comble soit plus droit, il ne faut que diviser la largeur de l'œuvre en quatre pars, et en prendre les trois pour tirer la montée, comme voyez à la marque D" (fig. 20).

Son of the master mason Jean Delorme, Philippe was familiar with traditional building techniques; therefore one can suppose – and it's the title itself of the work with the word 'nouvelles' which leads in this direction – that the meaning of the terms tierc and quint point changed somewhere between the thirteenth and sixteenth century.



trova nell'archivio della città di Firenze³² di Giovanni di Gherardo da Prato³³ (fig. 19) riguardante l'arco "a quinto acuto" brunelleschiano utilizzato nel Duomo di Firenze datato 28 febbraio 1426.

Interessante appare il disegno della costruzione geometrica della cupola. La base di imposta, che il testo riporta di 77 braccia, è suddivisa in cinque parti della lunghezza ognuna di braccia $15 \frac{2}{5}$. Sulla sinistra, oltre alla curvatura dell'arco vi è una seconda curva che rappresenta la calotta esterna della cupola. Sul punto medio della base di imposta è situato il centro di una circonferenza avente per diametro la linea di imposta stessa; accanto vi è una breve annotazione³⁴ che riporta «Questo e centro del sesto dimezo acuto». I centri dei due archi acuti sono posizionati sui quinti esterni della base. Accanto al centro sulla sinistra vi è riportata l'annotazione «Questo eil centro del quinto acuto e non quel dimezzo»; accanto al centro di destra si trova scritto «Questo e ilcentro delqui(n)to acuto (e) no(n) | quello del mezo adu(n)que uedete come | falsame(n)te se murato poi chesesto si mosse | i(n) sulla cornice i(n)pero chesemurato | asesto dimezo acuto (e) non a quinto, facen | do centro del mezo acuto straname(n) | te uae face(n)do | solame(n)te uno centro (e) | ogni a(n)gulo na uno p(er) se secondo del | modello mostrarsi nella presente fi | gura».

È del tutto evidente quindi che nella Firenze del XV secolo, l'arco "a quinto acuto" fosse diverso dal *quint point* villardiano.

E ancora, oltre alla testimonianza di Giovanni di Gherardo, nel capitolo XV del *Nouvelles inventions pour bien bastir*³⁵ pubblicato a Parigi nel 1561 intitolato "Comme l'on peut faire couvertures de diverses montées, tant de l'hémicycle que du tiers point, et autres", Philippe de l'Orme pone i centri dell'arco a terzo acuto e a quarto acuto rispettivamente a $2/3$ e a $3/4$ della base d'imposta: «Comme quoi, au lieu que l'hémicycle se prend d'un centre, ces façons ici se prennent de deux, ainsi que pouvez connaitre par la figure ensuivante, en laquelle le lieu marqué C de toute sa largeur se divise in trois parties égales, desquelles faut prendre les deux, et mettre la pointe du compas sur un des centres, et l'autre sur

16. "üirc, eigentlich Drittelsbogen [...] Man erhält ihn dadurch, daß man den Viertel eines Kreisbogens in drei gleiche Teile teilt, den Zirkel im ersten Punkte (Anfangspunkte) einsetzt und durch das Zentrum des Kreises zieht: dann schneidet dieser Bogen den Kreis im 'dritten Punkte' (tiers point) der Einteilung". Hahnloser 1972, p. 115.

17. See previous note and Brutalis 1902, pp. 271-279.

18. Della Bella 2012.

19. The other two are the ruler and the compass.

20. Roriczer, fol. 1r.

21. "From geometry we can glean several small but useful notions which I shall describe forthwith. In the first place, a simple way to draw a right angle, draw two straight intersecting lines as you please and mark the intersection with the letter *e*. Then, using a compass, place one end in *e*, and with the opening you choose, mark a point on both straight lines. This will create points *a* *b* *c*, equidistant from *e*. Draw a straight line from *a* to *b* and from *b* to *c*. This will give you a right angle, as per the example below. So if you eliminate the lines used to make the right angle, this will be the outcome". Translation by the author.

22. Referring to figure 8, diameter *AB* lies on the circumference of centre *C*; with any opening of the compass, place the point in *A* and draw a circumference arc; with the same opening as the compass, draw another circumference with centre in *B*. Joining the point found by the intersections of the two circumferences and centre *C* will create a right angle. Barnes 2009, p. 142.

23. The construction of the vesica piscis appears in drawings in Folio 18r attributed to Villard and Folio 21r attributed to Mano IV. The first is 'hidden' by a zoomorphic decoration, the second is more immediate and makes it easy to interpret the geometric construction. For the construction, draw segment *AB*. Pointing the compass in *B* with aperture *AB*, draw a circumference; with the same aperture, point the compass in *A* and draw a second circumference; joining the circumferences with a segment will create a straight line perpendicular to *AB*.

24. From the French, the *vousoir* of the arch. In Villard, *vosor* - Fol. 20v, *vosoir* - Fol. 21r; for Barnes, both scripts are by Mano IV, while for Hahnloser they were by Mastro II. Barnes 2009, p. 141; Hahnloser 1972, p. 115.

25. In critical reviews of Villard's portfolio, drawing 20e is generally known as the 'Spiral of Archimedes'. Branner demonstrated however that the one by Mano IV is very different and easier to build than the version by Archimedes. However, the latter was well known to the medieval mason who used it to rectify curves. Della Bella 2009.

23. La costruzione della *vesica piscis* compare in disegni del Folio 18r attribuito a Villard e del Folio 21r attribuito a Mano IV. La prima è "mascherata" da decorazione zoomorfica, la seconda è più immediata e mantiene leggibile la costruzione geometrica. Per la costruzione, si tracci il segmento *AB*. Puntando il compasso in *B* con apertura *AB*, si tracci una circonferenza; con la medesima apertura, si punti il compasso in *A* e si tracci una seconda circonferenza; unendo le intersezioni delle circonferenze con un segmento si otterrà una retta perpendicolare ad *AB*.

24. Dalla lingua francese, i concetti dell'arco. In Villard, *vosor* - Fol. 20v, *vosoir* - Fol. 21r; per Barnes, ambo le scritte sono attribuite a Mano IV, mentre per Hahnloser sono da attribuirsi a Mastro II. Barnes 2009, p. 141; Hahnloser 1972, p. 115.

25. Nelle edizioni critiche al portfolio di Villard, il disegno 20e è generalmente noto come "Spirale di Archimede". Branner ha dimostrato però che quella di Mano IV è ben diversa e di più semplice costruzione della versione archimedea. Questa tuttavia, era ben nota al *maçon* medievale che l'utilizzava per la rettificazione delle curve. Della Bella 2009.

26. Branner 1960, pp. 91-96.

27. Si noti che la distanza *BE* è data dall'intersezione sulle ordinate della terza circonferenza; vedremo in seguito che per il *quart point* e per il *quint point*, le distanze saranno quelle ricavate rispettivamente dalla quarta e dalla quinta circonferenza.

28. La scoperta di Branner acquista ancora più importanza dal ritrovamento, da parte dello stesso, di incisioni di almeno tre spirali sul piano di appoggio di un capitello della fabbrica di Chartres. Di queste, almeno una è proprio la spirale riportata sul Folio 20v del portfolio di Villard. Cfr. Branner 1960, pp. 91-96.

29. Discutere sulla matematica dell'architettura e sulla geometria medievale porterebbe a un discorso lungo e prolisso. Consideriamo però che ben quattro del-

le sette arti liberali influenzano l'architettura. A Chartres sono ben rappresentate, vi sono la Geometria con Euclide, l'Aritmetica con Boezio, l'Astronomia con Tolomeo e la Musica con Pitagora. Gli Elementi di Euclide erano inclusi nelle traduzioni di Boezio, il quale tra le altre cose studiò a fondo la sezione aurea. Le prime copie dei primi otto libri di Pitagora già circolavano nel XII secolo; attorno al 1250 già si studiava Erone da Alessandria. Jordanus Nemorarius o Saxo condusse esperimenti sulla quadratura e sulla "gravitas secundum situs", sull'irrazionale della sezione aurea e sulle condizioni di equilibrio. Cfr. Crombie 1959; Claggett 1961; Della Bella 2009; Branner 1957a, pp. 372-375.

30. Branner 1960, pp. 91-96.

31. Mi si perdoni il neologismo.

32. Si tratta di una pagina in pergamena di forma irregolare che misura circa cm 48x67 sulla quale sono presenti tre disegni. Questi sono ripassati in inchiostro marrone e rosso su linee guida tracciate a punta secca in argento e illuminati da tempere di color giallo, blu, verde e porpora.

33. Giovanni di Gherardo da Prato nacque a Prato nel 1360 e morì dopo il 1442; nota figura del primo Rinascimento, egli incarnava lo spirito umanista del suo tempo, era un letterato con interessi in ambito scientifico e di architettura e gli furono commissionati una serie di disegni e modelli della cupola e delle catene murarie di Santa Maria del Fiore. Cfr. Guasti 1857, p. 27.

34. Pagina in pergamena di forma irregolare che misura circa cm 48x67 sulla quale sono presenti tre disegni. Questi sono ripassati in inchiostro marrone e rosso su linee guida tracciate a punta secca in argento e illuminati da tempere di color giallo, blu, verde e porpora. Il testo è scritto in minuscolo; ci troviamo di fronte ad una bella e nitida grafia del XV secolo ricca di legature e abbreviazioni.

35. Philibert De l'Orme. *Nouvelles inventions pour bien bastir*. Frédéric Morel, Paris 1561, Paris, BENSBA, Masson 643.

l'extrémité de la largeur, et en faire la circonférence. Après, vous remuerez ledit compas et le mettrez en l'autre centre, et en ferez autant pour l'autre côté, et verrez la montée qui sera beaucoup plus haute que le demi-rond. Mais il faudrait avoir deux centres (ainsi que nous avons dit) pour changer la pointe dudit compas à faire telle circonférence de deux côtés, comme vous voyez à ladite figure suivante. Si voulez les couvertures plus hautes, et que le comble soit plus droit, il ne faut que diviser la largeur de l'œuvre en quatre parts, et en prendre les trois pour tirer la montée, comme voyez à la marque D» (fig. 20).

Figlio del *master mason* Jean Delorme, Philippe era ben a conoscenza della tecnica costruttiva tradizionale; è quindi possibile supporre – e d'altronde è il titolo stesso dell'opera con il termine "*nouvelles*" a farlo pensare – che i termini *tiere* e *quint point* abbiano cambiato significato in un indefinito periodo tra il XIII e il XVI secolo.

1. Il portfolio è composto da 33 fogli di pergamena dalle misure di circa 14,8x21 cm, è custodito a Parigi nella Bibliothèque nationale de France, MS Fr 19093.

2. Della Bella 2009.

3. Barnes 1989, pp. 209-223.

4. La maggior parte delle iscrizioni del portfolio sono attribuite direttamente a Villard, o come suggerisce Schlink, al suo scriba sotto dettatura dello stesso. Nel tempo, il portfolio si è arricchito di disegni e commenti di altri individui: Hahnloser ne conta altri due, "Mastro II" e "Mastro III". Barnes suggerisce vi siano almeno otto mani diverse (cfr. Barnes 2009, pp. 11-14).

5. Attribuito ad Altus, il *Mutus Liber* fu stampato per la prima volta in Francia da Pierre Savouret nel 1667; si tratta di un libro costituito da quindici pagine di illustrazioni prive di testo che rappresentano il processo alchemico.

6. Da Lassus a Branner, Cox e Bechmann, non sembra vi sia una lettura univoca dei disegni di Villard.

7. «are far from user-friendly instructions to guide the would-be builder». Cfr. Davis 1989, pp. 14-15.

8. «[Master II's] drawings are so cryptic and the texts beneath them so brief, that no adequate explanation have ever been found for them». Cfr. Branner 1957b, pp. 61-66.

9. Hahnloser attribuisce una serie di disegni (i, k ed l) a Villard mentre i restanti disegni e il testo sono attribuiti a Mastro II (cfr. Hahnloser 1972, pp. 194-199). Bucher, da parte sua, attribuisce le sole iscrizioni a Mastro II sotto dettatura di Villard stesso (cfr. Bucher 1979, pp. 15-193); infine Barnes attribuisce i disegni a Mano IV (cfr. Barnes 2009, pp. 11-14).

10. Branner 1960, pp. 91-96.

11. Da questo momento in poi, i riferimenti 20b, 20c, 20e, 20f e 20h di Hahnloser verranno rinominati rispettivamente 3b, 3c, 3e, 3f e 3h in riferimento alla illustrazione 3.

12. Il testo tra parentesi quadra è dell'autore.

13. «In questo modo si costruisce la chiave di un arco dal terzo punto e si verifica l'esattezza dello squadrone»; «In questo modo si costruisce la chiave di un arco del quinto punto». Traduzione dell'autore.

14. Hahnloser 1972, pp. 115-116.

15. Viollet-le-Duc 1854-1868.

16. «*tiere, eigentlich Drittelsbogen [...] Man erhält ihn dadurch, daß man den Viertel eines Kreisbogens in drei gleiche Teile teilt, den Zirkel im ersten Punkte (Anfangspunkte) einsetzt und durch das Zentrum des Kreises zieht; dann schneidet dieser Bogen den Kreis im 'dritten Punkte' (tiers point) der Einteilung.*» Hahnloser 1972, p. 115.

17. Vedi nota precedente e Brutalis 1902, pp. 271-279.

18. Della Bella 2012.

19. Essendo gli altri due, la riga e il compasso.

20. Roriczer, fol. 1r.

21. «Dalla geometria possiamo attingere ad alcune piccole ed utili nozioni che descriveremo di seguito. Come prima cosa, un semplice modo per disegnare un angolo retto, traccia due rette a piacere che si intersechino e dove ciò accade, segna la lettera e. Successivamente, utilizzando un compasso, punta una estremità in e, e con apertura a piacere, segna un punto su ambo le rette. Ciò individuerà i punti a b c, equidistanti da e. Traccia una retta da a a b e da b a c. In questo modo avrai un angolo retto, come dall'esempio qui sotto. Quindi se elimini le linee di costruzione, il risultato sarà il seguente». Traduzione dell'autore.

22. Riferito alla figura 8, sulla circonferenza di centro C, si stacchi il diametro AB; con apertura del compasso a piacere, si punti in A e si costruisca un arco di circonferenza, con la medesima apertura del compasso, si disegni un'altra circonferenza con centro in B. Unendo il punto trovato dalle intersezioni delle due circonferenze ed il centro C si determina un angolo retto. Barnes 2009, p. 142.

1. *The portfolio has 33 parchment sheets measuring approximately 14.8x21 cm and is housed in the Bibliothèque nationale de France in Paris, MS Fr 19093.*

2. Della Bella 2009.

3. Barnes 1989, pp. 209-223.

4. *Most of the inscriptions in the portfolio are directly attributed to Villard, or, as Schlink suggests, to his scribe whom Honnecourt dictated to. Over the years, the portfolio was enriched with drawings and comments by other individuals: Hahnloser thought there were another two, 'Mastro II' and 'Mastro III'. Barnes suggests that at least eight people were involved (cfr. Barnes 2009, pp. 11-14).*

5. *Attributed to Altus, the Mutus Liber was printed for the first time in France by Pierre Savouret in 1667; the book has fifteen pages with illustrations (but without a text) of the alchemic process.*

6. *From Lassus to Branner, Cox and Bechmann, there was no univocal interpretation of Villard's drawings.*

7. *"are far from user-friendly instructions to guide the would-be builder". Cfr. Davis 1989, pp. 14-15.*

8. *"[Master II's] drawings are so cryptic and the texts beneath them so brief, that no adequate explanation has ever been found for them". Cfr. Branner 1957b, pp. 61-66.*

9. *Hahnloser attributes several drawings (i, k and l) to Villard while the rest of the drawings and the text are attributed to Mastro II (cfr. Hahnloser 1972, pp. 194-199). Bucher, instead, attributes only the inscriptions to Mastro II dictated by Villard himself (cfr. Bucher 1979, pp. 15-193); finally, Barnes attributes the drawings to Mano IV (cfr. Barnes 2009, pp. 11-14).*

10. Branner 1960, pp. 91-96.

11. *From this point onwards, the references 20b, 20c, 20e, 20f and 20h by Hahnloser will be renamed respectively 3b, 3c, 3e, 3f and 3h with reference to illustration n. 3.*

12. *The text between square parenthesis is by the author.*

13. *"In this manner it is possible to build the keystone of an arch of the third point and verify the accuracy of the squaring"; "In this manner it is possible to build the keystone of an arch of the fifth point". Translation by the author.*

14. Hahnloser 1972, pp. 115-116.

15. Viollet-le-Duc 1854-1868.

26. Branner 1960, pp. 91-96.

27. Note that the distance BE is created by the intersection of the ordinates of the third circumference; we will see later that for the quart point and quint point, the distances will be respectively the distances from the fourth and fifth circumference.

28. This discovery was more important than his discovery of at least three spirals engraved on the support of a capital in Chartres cathedral. One of these is present on Folio 20r of the Villard's portfolio. Cfr. Branner 1960, pp. 91-96.

29. A discussion about the mathematics of medieval architecture and geometry would be long-winded and lengthy. However, we should consider that four of the seven liberal arts influence architecture. They are well represented in Chartres; Geometry with Euclid, Arithmetic with Boethius, Astronomy with Ptolemy and Music with Pythagoras. Euclid's Elements were included in the translations by Boethius who, amongst other things carefully studied the golden section. The first editions of

the first eight books by Pythagoras were already circulating in the twelfth century; around 1250 people already studied Heron of Alexandria. Jordanus Nemorarius or Saxo carried out experiments on squaring and 'gravitas secundum situ', on the irrational of the golden section and conditions of equilibrium. Cfr. Crombie 1959; Clagett 1961; Della Bella 2009; Branner 1957a, pp. 372-375.

30. Branner 1960, pp. 91-96.

31. Please excuse the neologism.

32. It is an irregularly-shaped sheet of parchment measuring approximately 48x67 cm with three drawings. They were traced over with brown and red ink along guidelines drawn with silver drypoint and coloured with yellow, blue, green and purple tempera paint.

33. Giovanni di Gherardo da Prato was born in Prato in 1360 and died after 1442; famous in the early Renaissance, he embodied the humanist spirit of his age; a man of letters interested in science and architecture he was commissioned a

series of drawings and models of the dome and walls of Santa Maria del Fiore. Cfr. Guasti 1857, p. 27.

34. An irregularly-shaped piece of parchment measuring approximately 48x67 cm with three drawings. The later were traced over in brown and red ink along guidelines drawn in silver drypoint and highlighted with yellow, blue, green and purple tempera paint. The text was written in lower case; the fifteenth-century writing is beautiful and sharp, full of ligature and abbreviations.

35. This is the centre of the fifth point arch and not the round arch. Therefore, see how the vault over the impost cornice was falsely built because it was constructed like a semicircular and not a fifth point. From the centre of the semicircular arch, strangely enough the vault has only one centre while, according to the model, every angle has its own (centre). All this is shown in this figure.

36. Philibert De l'Orme. Nouvelles inventions pour bien bastir. Frédéric Morel, Paris 1561, Paris, BENSBA, Masson 643.

References

- Barnes Carl F. Jr. 1989. Le 'Problème' de Villard de Honnecourt. In *Les Bâisseurs des Cathédrales Gothiques*. Strasbourg: Editions Les Musees de la ville de Strasbourg, pp. 209-223.
- Barnes Carl F. Jr. 2009. *The portfolio of Villard de Honnecourt*. Farnham, England: Ashgate Publishing Limited, 2009, pp. 11-14.
- Branner Robert. 1957a. A Note on Gothic Architects and Scholars. *The Burlington Magazine*, 99, n. 656, Nov. 1957, pp. 372-375.
- Branner Robert. 1957b. Three Problems from the Villard de Honnecourt Manuscript. *Art Bulletin*, 39, 1957, pp. 61-66.
- Branner Robert. 1960. Villard de Honnecourt, Archimedes and Chartres. *Journal of the Society of Architectural Historians*, 19, 1960, pp. 91-96.
- Brutalis J. A. 1902. 'Tiers-poin't et 'quint-point'. *Bulletin archéologique du comité des travaux historiques et scientifiques*, 1902, pp. 273-279.
- Bucher François. 1979. The Lodge Book of Villard de Honnecourt. In *Architector: the Lodge Books and Sketchbooks of Medieval Architects*, vol. 1. New York: Abaris Books 1979, pp. 15-193.
- Clagett Marshall. 1961. *The Science of Mechanics in the Middle Ages*. London: Oxford University Press, 1961.
- Crombie Alistair Cameron. 1959. *Medieval and early Modern Science. Vol. 1. Science in the Middle Ages: V-XIII Centuries*. Welwyn Garden City, 1959.
- Davis Michael. 1989. Stereometric Drawings in the Villard Manuscript - Part II. *AVISTA Forum Journal*, 4, 1989, pp. 14-15.
- Della Bella Emiliano. 2009. *Le costruzioni geometriche nella stereotomia*. Tesi di Dottorato, Università Sapienza, Dipartimento RAADAr, Roma, 2009.
- Della Bella Emiliano. 2012. La Geometria delle volte medievali e la percezione spaziale dell'architetto. *Disegnarecon*, 5, 9, 2012, pp. 85-92. <http://disegnarecon.unibo.it/article/view/3157> [dicembre 2012].
- De l'Orme Philibert. 1561. *Nouvelles inventions pour bien bastir*. Frédéric Morel, Paris, BENSBA, Masson 643, Cap. XV.
- Guasti Cesare. 1857. *La Cupola di Santa Maria del Fiore*. Firenze: Barbera Bianchi e Comp., 1857, p. 27.
- Hahnloser Hans R. 1972. *Villard de Honnecourt, kritische Gesamtausgabe des Bauhüttenbuchs ms. fr 19093 der Pariser Nationalbibliothek*. Graz, Austria: Akademische Druck u. Verlagsanstalt, 1972, pp. 194-199.
- Roriczer Matthäus. *Die Geometria Deutsch*. Würzburg: Universitätsbibliothek I.t.q.XXXX.
- Saaltman Howard. 1959. Giovanni di Gherardo da Prato's Designs concerning the Cupola of Santa Maria del Fiore in Florence. *Journal of Society of Architectural Historians*, XVIII, 1959, pp. 11-20.
- Viollet-le-Duc Eugène Emmanuel. 1854-1868. *Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XIe au XVIe siècle*. Vol. 10. Paris, 1854-1868.